

Контрольная работа по теме "Интегральные уравнения Фредгольма II рода"

Фамилия студента

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

1. (1 балл) Какое уравнение называется уравнением Фредгольма II рода?
2. (1 балл) Какая функция называется итерированным ядром уравнения Фредгольма II рода?
3. (1 балл) Какая функция называется резольвентой уравнения Фредгольма II рода?
4. (1 балл) Выпишите условие, при котором сходится метод последовательных приближений.
5. (1 балл) Выпишите решение уравнения Фредгольма II рода через резольвенту.
6. (1 балл) Какое ядро называется вырожденным?
7. (1 балл) Какое уравнение называется сопряженным?
8. (1 балл) Какие числа называют правильными?
9. (1 балл) Какие числа называют характеристическими?
10. (2 балла) Сформулировать альтернативу Фредгольма.

11. (2 балла) Методом последовательных приближений решить уравнение

$$\varphi(x) = 2 \sin x + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi t \sin x \varphi(t) dt.$$

12. (3 балла) Методом итерированных ядер найти резольвенту и решение уравнения

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^t \varphi(t) dt = e^{-x}.$$

13. (3 балла) Найти все решения или установить неразрешимость уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(x - \frac{1}{2} (3t^2 - 1) + \frac{t}{2} (3x^2 - 1) \right) \varphi(t) dt = 1.$$

14. (3 балла) Найти характеристические и собственные функции однородного интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi \cos x \cos t \varphi(t) dt = 0.$$

15. (3 балла) Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - 2xt) \varphi(t) dt = x^3 - x.$$

16. (5 баллов) Показать, что если

$$K(x, t) = f_1(x)f_2(t) \quad \text{и} \quad \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = A,$$

то решение соответствующего неоднородного уравнения с правой частью $f(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - \lambda A} \int_a^b f(t)f_2(t)dt.$$